864

华南理工大学
2009年攻读硕士学位研究生入学考试试卷

（请在答题纸上做答，试卷上做答无效，试后本卷必须与答题纸一同交回）

科目名称：高等代数

适用专业：基础数学，计算数学，概率论与数理统计，应用数学，运筹学与控制论

1. (15 分) 设 $f(x), g(x)$ 是 $P[x]$ 中的非零多项式，且 $g(x) = s^m(x)g_1(x)$，这里 $m \geq 1$，$(s(x), g_1(x)) = 1$，$s(x) \mid f(x)$。证明：不存在 $f_1(x), r(x) \in P[x]$，且 $r(x) \neq 0$，$\partial(r(x)) < \partial(s(x))$ 使得

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{r(x)}{s^m(x)} + \frac{f_1(x)}{s^{m-1}(x)g_1(x)}.$$

2. (15 分) 设 $P[X]_n$ 表示数域 P 上所有次数 $< n$ 的多项式及零多项式构成的线性空间，令多项式 $f_i(x) = (x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n)$，其中 $i = 1, 2, \cdots, n$，且 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是数域 P 中 n 个互不相同的数。

(1) 证明：$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 是 $P[X]_n$ 的一组基；

(2) 在 **(1)** 中，取 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为全体 n 次单位根，求由基 $1, x, \cdots, x^{n-1}$ 到基 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 的过渡矩阵 T。

3. (20 分) 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = A$，且 A 的秩 $r(A) = r$，

(1) 证明：$tr(A) = r$，这里 A 的迹 $tr(A)$ 定义为 A 的主对角线上的元素之和；

(2) 求 $|A + E|$ 的值。

4. (20 分) 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 是欧氏空间 V 的一组标准正交基，设 $\alpha_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3$，$\alpha_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3$，$W = L(\alpha_1, \alpha_2)$，

(1) 求 W 的一组标准正交基；

(2) 求 $W^{\perp}$ 的一组标准正交基；

(3) 求 $\alpha = \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3$ 在 W 中的内射影（即求 $\beta \in W$，使 $\alpha = \beta + \gamma$，$\gamma \in W^{\perp}$），并求 α 到 W 距离。

5. (20 分) 设 $\mathcal{A}$ 是数域 P 上的 n 维线性空间 V 的线性变换, $f(x), g(x) \in P[x]$. 证明:

(1) $f(\mathcal{A})^{-1}(0) + g(\mathcal{A})^{-1}(0) \subseteq (f(\mathcal{A})g(\mathcal{A}))^{-1}(0)$.

(2) 当 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素时, 有

$$f(\mathcal{A})^{-1}(0) \oplus g(\mathcal{A})^{-1}(0) = (f(\mathcal{A})g(\mathcal{A}))^{-1}(0).$$

6. (20 分) 设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X'AX$ 为 n 元实二次型. 若矩阵 A 的顺序主子式 Δ_k ($k = 1, 2, \cdots, n$) 都不为零, 证明 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 可以经过非退化的线性替换化为下述标准型

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

这里 $\lambda_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 并且 $\Delta_0 = 1$.

7. (20 分) 设 A, B 分别为数域 P 上的 $m \times n$ 与 $n \times s$ 矩阵, 又 $W = \{B\alpha \mid AB\alpha = 0, \alpha\text{为}P\text{上的}s\text{维列向量, 即}\alpha \in P^{s\times 1}\}$ 是 n 维列向量空间 $P^{n\times 1}$ 的子空间, 证明:

$$dim(W) = r(B) - r(AB).$$

8. (20 分) 设 $f(X, Y)$ 为定义在数域 P 上的 n 维线性空间 V 上的一个双线性函数, 证明: $f(X, Y) = X'AY = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j$ 可以表示为两个线性函数 $f_1(X) = \sum_{i=1}^n b_i x_i$, $f_2(Y) = \sum_{i=1}^n c_i y_i$ 之积的充分必要条件是 $f(X, Y)$ 的度量矩阵 A 的秩 ≤ 1.