浙江师范大学 2008 年硕士研究生入学考试试题

科目代码：681　　　科目名称：数学分析

提示：

1、本科目适用专业：基础数学、计算数学、应用数学、运筹学与控制论、系统理论；

2、请将所有答案写于答题纸上，写在试题上的不给分；

3、请填写准考证号后 6 位：____________。

一、（每小题 8 分，共 40 分）求下列各式。

1、求 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t^3)}{t^2\sin t}$.　　2、求 $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$.

3、求 $\int_0^1 t\ln t dt$.　　4、求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{xy}$.

5、设 k 为实数，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^k+2^k+\cdots+n^k}$.

二、（12 分）设 $f(x)$在 $x=0$ 处可导，在 $x=0$ 的某邻域上连续，且 $f(0)=0$, 求

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}-\cos x}\int_0^{x^2} f(t)dt.$$

三、（12 分）已知

$f(x)=\int_0^x(\int_0^{\sin t}\sqrt{1+u^2}du)dt$，求 $f''(x)$.

四、（12 分）证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n dx=0.$$

五、 （12 分）若 $f(x)$在$[0,+\infty)$上一致连续，问$[f(x)]^2$, $\sqrt{|f(x)|}$在$[0,+\infty)$上也一致连续吗？证明或举反例.

六、 （12 分）求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)^n dx\right\}^{\frac{1}{n}}.$$

七、 （10 分）证明当$x\in[0,1]$时，

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}[\cos m!\pi x]^n=\begin{cases}1,\ x\text{为有理数},\\0,\ x\text{为无理数}.\end{cases}$$

八、 （10 分）设区域 D 为$[0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1]$，求二重积分

$$\iint_D|3x-4y|dxdy.$$

九、 （10 分）证明下列奇异积分 1)当$\alpha>2$时存在；2）当$\alpha\le 2$时不存在，

$$\int_0^1\frac{\ln(1+t^\alpha)}{t^3}dt.$$

十、 （10 分）若$f(x)$在$[a, b]$上连续，$f(x)>0,\ g_n(x)=\sqrt[n]{f(x)}$，证明$g_n(x)$在$[a, b]$上一致收敛于 1.

十一、（10 分）已知 $f(x,y)$ 在 xy 平面上连续可微，

$$f(1,1)=1,\ f_x'(1,1)=a,\ f_y'(1,1)=b,\ g(x)=f(x,f(x,f(x,y))),\ \text{求}g'(1).$$