华中师范大学

二〇〇八年研究生入学考试试题

院系、招生专业： 数学与统计学学院　　　　考试时间：元月 20 日上午

考试科目代码及名称：618 数学分析

一、(36 分) 计算题:

(1) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)}$;

(2) 求 $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{t^4}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2}\sin\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$;

(3) 求曲线积分 $\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+9y^2}$, 其中 L 为平面内任意一条不过原点的正向光滑封闭简单曲线.

二、(15 分) 设函数 f 在 $[0,+\infty)$ 上具有连续的导函数, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在有限, $0<\alpha<1$ 是一个常数. 证明函数 $f(x^\alpha)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

三、(15 分) 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且在 (a,b) 内可导. 试证在 (a,b) 内存在点 ξ, 使得 $[f(b)-f(a)]g'(\xi)=[g(b)-g(a)]f'(\xi)$.

四、(20 分) 证明: 函数项级数 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上收敛, 但不一致收敛, 而和函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可以任意次求导.

五、(20 分) 证明: 方程 $x^2+y=\sin(xy)$ 在原点的某个邻域内可以唯一确定隐函数 $y=f(x)$, 并计算 $y'(0)$ 的值.

考生答题请一律写在答题纸上，在试卷上作答无效。

六、（14 分）若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界，则必存在 $[a,b]$ 上的某点，使得 $f(x)$ 在该点的任何邻域内无界.

七、（12 分）设函数 u 在 $[0,+\infty)$ 上连续可微且 $\int_0^{+\infty}(|u(x)|^2+|u'(x)|^2)dx<+\infty$．试证

(1) 存在 $[0,+\infty)$ 中的子列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得当 $n\to\infty$ 时，$x_n\to+\infty$ 且 $u(x_n)\to 0$；

(2) 存在某常数 $C>0$，使得

$$\sup_{x\in[0,+\infty)}|u(x)|\le C\left(\int_0^{+\infty}(|u(x)|^2+|u'(x)|^2)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

八、（18 分）设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 为有界闭区域，且具有光滑边界 $\partial\Omega$，$0<T\le+\infty$.

(1) 设 u,v 是 Ω 上具有连续二阶偏导数的函数，试证

$$\iiint_{\Omega} v\Delta u dxdydz=-\iiint_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla v dxdydz+\oint\!\!\oint_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n}dS,$$

其中 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$，$\nabla u$ 为 u 的梯度，$\frac{\partial u}{\partial n}$ 为 u 沿区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 的外法向 $\vec{n}$ 的方向导数;

(2) 设 $u(x,y,z,t)$ 在 $\Omega\times[0,T)$ 上具有连续一阶偏导数，试证

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\Omega}u(x,y,z,t)dxdydz=\iiint_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,t)dxdydz,\quad \forall t\in[0,T);$$

(3) 设 $u(x,y,z,t)$ 在 $\Omega\times[0,T)$ 上具有连续二阶偏导数且满足

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u+u^3.$$

若 u 在 $\partial\Omega\times[0,T)$ 上恒为零，记 $|\nabla u|^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$，试证

$$E(t)=\iiint_{\Omega}\left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2-\frac{1}{4}u^4\right)dxdydz \text{ 在 } [0,T) \text{ 上是减函数.}$$