

华中师范大学

二〇〇八年研究生入学考试试题

院系、招生专业：数学与统计学学院各专业 考试时间：元月 20 日下午
考试科目代码及名称：888, 高等代数

1. (20 分) 以下陈述是否正确？正确的请予以证明，不正确的请举反例（例子的正确性要求论证）。

(1) 有理系数多项式 $f(x)$ 如果在有理数域上不可约则在任何数域上不可约。

(2) 两个有理系数多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 如果在有理数域上互素则在任何数域上互素。

(定义：数域 F 上的多项式 $f(x)$ 称为在 F 上不可约如果 $f(x)$ 次数大于 0 而且只要 F 上的多项式 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的因式那么 $g(x)$ 要么与 $f(x)$ 相伴要么与 1 相伴。

(定义：数域 F 上的多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 称为在 F 上互素如果它们在 F 上的最大公因式与 1 相伴。)

2. (20 分) (1) 设 A, B 都是 n 阶方阵，且 $AB = 0$ 。证明 BA 的秩 $\leq [n/2]$ ，其中 $[n/2]$ 表示不超过 $n/2$ 的最大整数。

(2) 对任正整数 n ，都存在 n 阶方阵 A, B 满足 $AB = 0$ 而 BA 的秩 $= [n/2]$ 。

3. (30 分) 令 \mathbb{R} 表示实数域， $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 。

(1) 求实矩阵 A 的实特征值和实特征向量。

(2) 求 \mathbb{R}^3 中所有的 A -不变子空间（实向量空间 \mathbb{R}^3 的子空间 U 称为 A -不变的如果 $Au \in U, \forall u \in U$ ，其中 u 写为列向量）。

4. (30 分) (1) 请叙述什么是实二次型？什么是化实二次型为平方和定理？什么是实二次型的惯性定理？

(2) 证明实二次型的惯性定理。

5. (20 分) 设 n 维复向量空间 V 的线性变换 \mathcal{P} 满足 $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$ 。证明：

(1) $V = \text{Im } \mathcal{P} \oplus \text{Ker } \mathcal{P}$ ，其中 $\text{Im } \mathcal{P}$ 表示 \mathcal{P} 的像子空间， $\text{Ker } \mathcal{P}$ 表示 \mathcal{P} 的核子空间。

(2) 像子空间维数 $\dim \text{Im } \mathcal{P} = \text{tr } \mathcal{P}$ ，其中 $\text{tr } \mathcal{P}$ 表示线性变换 \mathcal{P} 的迹即 \mathcal{P} 的所有特征根（计重数）之和。

6. (30 分) 设 $2n$ 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} -E & E \\ E & E \end{pmatrix}$ ，其中 E 是 n 阶单位矩阵。

(1) 求 A 的特征多项式。

(2) 求 A 的极小多项式。

(3) 求 A 的约尔当标准形。

考生答题请一律写在答题纸上，在试卷上作答无效。