2008年太原科技大学硕士研究生入学考试

高等代数（831）试题

（可以不抄题、答案必须写在答题纸上）

一、填空题（每小题4分，共20分）

1．已知5级λ一矩阵$A(\lambda)$的各级行列式因子为

$$D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=D_3(\lambda)=1,\quad D_4(\lambda)=\lambda(\lambda-1),\quad D_5(\lambda)=\lambda^3(\lambda-1)^2$$

则$A(\lambda)$的不变因子为________________，$A(\lambda)$的标准形为____________.

2．线性方程组$AX=b$无解，且秩$(A)=3$，则秩$(A\,|\,b)=$_____.

3．设A与B相似，其中$A=\begin{pmatrix}1&b&1\\b&a&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$，则$a=$____，$b=$____.

4．已知三阶行列式$|A|=2,|B|=3$，则$\left|-2(A'B^{-1})^{-1}\right|=$____________.(其中$A'$为$A$的转置)

5．设n级方阵A的各行元素之和均为零，且秩$(A)=n-1$，则线性方程组$AX=0$的通解为________________.

二、单项选择题（每小题5分，共20分）

1．设A,B为同阶可逆矩阵，则（　　）.

(A)　$AB=BA$；　　(B) 存在可逆矩阵P，使$P^{-1}AP=B$；

(C) 存在可逆矩阵C，使$C'AC=B$；　(D) 存在可逆矩阵P和Q，使$PAQ=B$.

2．设矩阵$A_{m\times n}$的秩为$R(A)=m<n$，I_m为m阶单位方阵，下列结论中正确的是（　）

(A) A的任意m个列向量必线性无关；

(B) A的任意一个m阶子式不等于零；

(C) 若矩阵B满足$BA=O$，则$B=O$；

(D) A 通过初等行变换，必可化为 $(I_m O)$ 的形式。

3．设 A 是 $m\times n$ 矩阵，$AX=O$ 是非齐次线性方程组 $AX=\boldsymbol{b}$ 所对应的齐次线性方程组，则下列结论正确的是（　　）

(A) 若 $AX=O$ 仅有零解，则 $AX=\boldsymbol{b}$ 有唯一解；

(B) 若 $AX=O$ 有非零解，则 $AX=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解；

(C) 若 $AX=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解，则 $AX=O$ 仅有零解；

(D) 若 $AX=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解，则 $AX=O$ 有非零解。

4．$n\times n$ 的 $\lambda-$矩阵 $A(\lambda)$ 可逆的充要条件是（　　）

(A)秩 $(A(\lambda))=n$　(B) $|A(\lambda)|\neq 0$　(C) $|A(\lambda)|$ 为一非零常数 (D)行向量组线性无关。

三、（本题满分 15 分）试就 a,b 的各种情况，讨论下列方程组是否有解？若有解，则求之.

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ 2x_1+(a+2)x_2-(b+2)x_3=3 \\ -3ax_2+(a+2b)x_3=-3 \end{cases}$$

四、（本题满分 10 分）

计算行列式 $$\begin{vmatrix} \dfrac{x_1}{x_1-1} & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \dfrac{x_2}{x_2-1} & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{x_n}{x_n-1} & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

五、（本题满分 20 分）用正交线性替换化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$$

为标准形，并判断该二次型是否正定。

六、（本题满分 10 分）设 $A,B,A+B$ 均为 n 阶可逆矩阵，证明 $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆，并求其逆矩阵。

七、（本题满分 10 分）设 A 是 n 阶方阵，线性方程组 $AX=b$ 对任意的 n 维列向量 b 均有解，证明对任意的 n 维列向量 β，$A^{*}X=\beta$ 必有唯一解。（A^{*} 为 A 的伴随矩阵）

八、（本题满分 15 分）设 V 为数域 P 上的 n 维线性空间，σ 是 V 上的一个线性变换，且有 $\xi\in V$ 使得 $\sigma^{n-1}\xi\neq 0$，而 $\sigma^{n}\xi=0$.

（1）证明：$\xi,\sigma\xi,\cdots,\sigma^{n-1}\xi$ 也为 V 的一组基；

（2）求 σ 在基 $\xi,\sigma\xi,\cdots,\sigma^{n-1}\xi$ 下的矩阵；

（3）证明：σ^{n} 为零变换.

九、（本题满分 20 分）设 $P[x]_n$ 表示数域 P 上次数小于 n 的多项式及零多项式作成的线性空间，$a\in P$，

（1） 证明：$V_1=\{f(x)|f(a)=0,f(x)\in P[x]_n\}$ 是 $P[x]_n$ 的子空间；

（2） 求 V_1 的一组基及维数；

（3） 记 $V_2=P$，证明：$P[x]_n=V_1\oplus V_2$。

十、（本题满分 10 分）设 A,B 是两个 $n\times n$ 实对称矩阵，且 B 是正定矩阵，证明存在一 $n\times n$ 实可逆矩阵 T 使 $T'AT$ 与 $T'BT$ 同时为对角形。